per pensar d'un minut a una hora

Jordi Deulofeu
Departament de Didàctica de les Matemàtiques
i de les Ciències Experimentals
Universitat Autònoma de Barcelona
jordi.deulofeu@uab.cat

Malgrat els esforços per generar idees i materials, acompanyats de sessions de formació permanent del professorat, que permetin desenvolupar el treball relacionat amb la geometria a l'educació obligatòria, sembla que aquesta part de les matemàtiques segueix essent aquella que més dificultats representa per als nostres alumnes, segons indiquen els resultats de les proves de competències d'aquest 2016. Entre els materials disponibles, que des d'aquí us animo a revisar, destaca el treball que sobre el tema ha realitzat l'amic Anton Aubanell i que porta per títol «Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria a l'ESO», un excel·lent compendi d'activitats i suggeriments.

Seguint en aquesta línia, dedicarem l'article d'avui a presentar i comentar diversos problemes de caire geomètric, tenint en compte que la geometria proporciona situacions que poden ser analitzades des de punts de vista diversos, com l'àlgebra o les funcions, la qual cosa ens permet establir connexions entre temes matemàtics diferents, mostrant la unitat de les matemàtiques i les interrelacions entre conceptes i les seves representacions.

Començarem amb un problema que s'ha plantejat a les proves cangur d'enguany (2016) que m'ha semblat especialment interessant i que permet variacions, extensions i generalitzacions que, segurament, encara ho són més. És una situació que permet generar diversos problemes de dificultat variable.

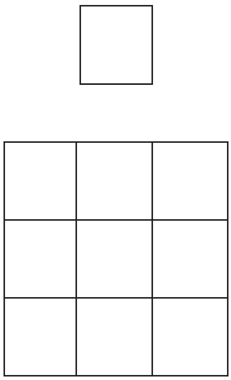
► **Problema 1.** Preneu una corda formada per 12 segments de longitud igual (fent, per exemple, 12 nusos equidistants) i lligueu-ne els extrems. Amb aquesta corda podem formar un triangle els vèrtexs del qual siguin tres nusos de la corda. Suposem que el triangle format és equilàter (en cada costat hi haurà tres nusos, a banda dels tres vèrtexs). Quants triangles es poden formar? Si ara imposem la condició que els triangles han de ser diferents (no congruents), quants triangles podrem construir? Què passa amb la quantitat de triangles si amb la mateixa corda formem inicialment un triangle no equilàter: disminueix, augmenta o es manté constant?

Em sembla un bon problema per dur a terme el vuitè «manament» del decàleg de Pere Puig Adam, que apareix en el seu darrer llibre, *La enseñanza de la matemática actual* (1960), i que em permeto reproduir, ja que el text, malgrat ser escrit en un castellà que avui sembla antic, no té pèrdua. Deia Puig Adam:

> VIII.—*Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.* Suele ser expediente cómodo de preparadores suministrar cuanto antes las reglas y repetir sus aplicaciones a saturación. Pero procediendo de esta suerte se crea en los alumnos el más rígido automatismo mental. Este proceder es tanto más peligroso cuanto que el alumno mismo, en su afán de acción, acoge con alegría las reglas que le permiten actuar rápidamente antes de asimilar las esencias metódicas; alegría tanto mayor cuanto más discursivos y aburridos son los procedimientos de asimilación a que se le somete. La necesidad de la regla no es sentida cuando la acción del alumno se desenvuelve en los procesos mismos de adquisición. Muchos pedagogos, pasándose por ello a la reacción contraria, abominan de toda regla ante el peligro de automatismo que pueda provocar. Sin embargo, la regla, cuando es posterior al dominio del procedimiento, tiene un valor: el de la condensación expresiva del acto dominado. Pero sólo es aconsejable cuando existe tal dominio previo, dominio que significa flexibilidad de adaptación a cada caso particular y no rigidez de acción. Solamente cuando la síntesis expresiva del procedimiento no corra el riesgo de convertirse en imperativo simplista de acción es cuando la regla resulta lícita pedagógicamente y aun aconsejable como recurso último.

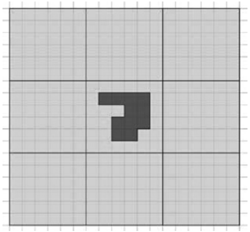
Del llibre de Derek Holton *Problem Solving. The creative side of mathematics* (2010) he seleccionat aquesta interessant situació que, més que un problema, és una petita investigació en què l'objectiu és la seva generalització, anomenada per l'autor *The Rolling Square Problem*:

► **Problema 2.** En un vèrtex d'un quadrat format per nou quadrats iguals (3×3) situem un altre quadrat (vegeu la figura). Fem rodar, sense lliscar, el quadrat petit al voltant del gran. Quin és el lloc geomètric descrit per cadascun dels vèrtexs del quadrat petit? Generalitzeu la situació, primer per a un quadrat gran de $n \times n$ i posteriorment per a un rectangle de dimensions $n \times m$.



La següent activitat l'he extret del capítol de geometria del llibre *Aprender a enseñar matemáticas en la Educación Secundaria*, que hem escrit la Cecilia Calvo, en Joan Jareño, la Laura Morera i jo mateix, i que quan escric l'article està a punt de ser publicat. Més que un problema és una activitat que permet treballar la relació perímetre -- àrea i veure que, donada una figura, és possible trobar totes les combinacions: perímetre menor, igual o major i àrea també menor, igual o major, que una figura donada.

▶ **Problema 3.** Observeu la figura següent. En cadascun del vuit quadrats que volten la figura dibuixada, heu de dibuixar una figura —formada per un nombre enter de quadrats petits— de tal manera que el perímetre creixi d'esquerra a dreta (si està més a l'esquerra de la figura central ha de tenir el perímetre menor i si està més a la dreta, més gran) i l'àrea creixi de dalt a baix (si està més amunt ha de tenir l'àrea menor i si està més avall ha de ser més gran).



Seguint amb el tema perímetre—àrea, us presento una altra activitat del llibre esmentat.

▶ **Problema 4.** Dibuixeu una circumferència i vuit punts equidistants sobre ella. Trieu quatre punts i dibuixeu un quadrilàter. Repetiu el procés de manera que obtingueu tots els quadrilàters diferents possibles. A partir de les figures dibuixades es poden plantejar nombroses qüestions: Classifiqueu els quadrilàters. Ordeneu les figures obtingudes segons el seu perímetre. Feu el mateix amb l'àrea. Tingueu en compte que no és necessari fer càlculs d'àrees, sinó que es pot resoldre per comparació directa. Penseu altres maneres de comparar les figures dibuixades com, per exemple, segons els eixos de simetria. Segur que trobareu altres qüestions per a ampliar aquesta activitat.

Acabaré l'article d'avui amb una activitat que vaig conèixer el mes de juliol passat a l'ICME 13 d'Hamburg, en una magnífica sessió taller dedicada a la matemàtica realista dels holandesos. El professor P. Drijvers va formular el problema següent (al qual em permeto canviar el context i apropar-lo a casa nostra):

▶ **Problema 5.** Hem fet un recorregut en cotxe en tres etapes: des de Tavascan fins a Begur; en total, 226 km. Hem passat per la Seu d'Urgell (Tavascan-Seu d'Urgell, 85 km) i per Olot (Seu d'Urgell-Olot, 54 km), per acabar a Begur (Olot-Begur, 87 km). Es tracta de dibuixar un gràfic del recorregut en uns eixos cartesians, de manera que en l'eix de les abscisses representem la distància del vehicle a la Seu d'Urgell i en l'eix de les ordenades, la distància a Olot. S'entén que la distància es mesura sempre seguint la carretera.

El dibuix del gràfic no és complicat, però fa pensar... i molt! Una vegada fet aquest gràfic podeu plantejar nombroses variacions: en general, tenim 4 ciutats (A, B, C, D) i anem de A a D passant per B i per C. Si coneixem les distàncies de A a B, de B a C i de C a D, podem dibuixar els diferents gràfics del recorregut en uns eixos cartesians, de manera que en un dels eixos representem la distància a una de les ciutats i en l'altre la distància a una altra de les ciutats.

Espero que les propostes d'avui us hagin resultat interessants, tant per a vosaltres com per a proposar-les als vostres alumnes.

Referències

Calvo, C., Deulofeu, J., Jareño, J., Morera, L. (2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la Educación Secundaria*. Madrid: Síntesis (en premsa).

Holton, D. (2010). *Problem Solving. The creative side of mathematics*. Leicester (UK): The Matematical Association.

Puig Adam, P. (1960). *La matemática y su enseñanza actual.* Madrid: Ministerio de Educación Nacional.